

## ΘΕΜΑ Α

- A1. Ιδιότητα  $u$  σελ 65 Σχολ
- A2. Ορισμός σελ 87 Σχολ
- A3. Ορισμός σελ 27 Σχολ
- A4.
  - α'. Λάθος
  - β'. Σωστό
  - γ'. Σωστό
  - δ'. Λάθος
  - ε'. Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B1.** Η συνάρτηση  $f$  είναι πολυωνυμική, άρα παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο:

$$f'(x) = \left( \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x - 3 \implies f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

**B2.** Για τη μελέτη μονοτονίας και ακροτάτων, βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της  $f'(x)$ :

$$f'(x) = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$ . Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_1 = 3 \quad \text{και} \quad x_2 = -1$$

Το πρόσημο της  $f'(x)$  και η μονοτονία της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$

- Η  $f$  είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα  $(-\infty, -1]$  και  $[3, +\infty)$ .
- Η  $f$  είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα  $[-1, 3]$ .

**Ακρότατα:**

- Παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση  $x = -1$  με τιμή:

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

- Παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση  $x = 3$  με τιμή:

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (3)^2 - 3(3) + 1 = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$$

**B3.** Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A(0, f(0))$  είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

Υπολογίζουμε τις τιμές:

- $f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - 0^2 - 3(0) + 1 = 1$
- $f'(0) = 0^2 - 2(0) - 3 = -3$

Συνεπώς:  $y - 1 = -3x \implies y = -3x + 1$ .

**B4.** Ζητείται το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} \quad \left[ \text{Μορφή } \frac{0}{0} \right]$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή (με ρίζες το  $-1$  και το  $3$ ):

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -1 - 3 = -4$$

**ΘΕΜΑ Γ**

$$\Gamma 1. \bar{X} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 t_i \Leftrightarrow 4 = \frac{4+5+4+k+0+3+7}{7} \Leftrightarrow 23+k=28 \Leftrightarrow k=5$$

$\Gamma 2.$  Το δείγμα μεγέθους 7 (περιττός) σε αύξουσα διάταξη είναι: 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

Άρα η διάμεσος είναι  $\delta = t_4 = 4$

$\Gamma 4.$

$$s^2 = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{X})^2 = \frac{(4-0)^2 + (4-3)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-5)^2 + (4-5)^2 + (4-7)^2}{7} =$$

$$= \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = 4$$

$$\Gamma 5. CV = \frac{s}{|\bar{X}|} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού } CV > 0.1.$$

**ΘΕΜΑ Δ**

$$\Delta 1. \text{ Το εμβαδόν είναι } E = xy \Leftrightarrow 100 = xy \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$$

$$\text{Η περίμετρος είναι } \Pi = 2x + 2y = 2x + 2\frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x} \quad x > 0.$$

$\Delta 2.$

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x} \quad x > 0$$

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}, \quad \Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 10 \text{ άρα } x = 10$$

$$\Pi'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 100 \Leftrightarrow |x| > 10 \Leftrightarrow x > 10$$

Άρα η  $\Pi$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 10]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[10, +\infty)$ .

Έτσι παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο  $x=10$ . Τότε  $y=100/10=10$  άρα τετράγωνο.

$\Delta 3.$

Στο  $(0, 10)$  η  $\Pi$  είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$$

$$x_1 - x_2 < 0, \quad \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$$

$$\text{Άρα } A < 0$$

Δ4. Ζητείται το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\frac{2(x^2-100)}{x^2}}{\sqrt{10x} - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \left[ \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2 \cdot (\sqrt{10x} - 10)} \right]$$

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση  $(\sqrt{10x} + 10)$ :

$$= \lim_{x \rightarrow 10} \left[ \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2 \cdot (10x - 100)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 10} \left[ \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2 \cdot (x-10)} \right]$$

Απλοποιούμε τον παράγοντα  $(x-10)$ :

$$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2} = \frac{2(10+10)(\sqrt{100} + 10)}{10 \cdot 10^2} = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5} = 0,8$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ ,ΚΕΡΑΤΣΙΝΙΟΥ ΚΑΙ ΡΑΦΗΝΑΣ  
-ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ  
-ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ  
-ΛΕΝΤΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ



ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687