ΠΙΣΤΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΟΡΟΣΗΜΟ
ΙΑΤΡΙΚΟ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ. 76

Α2. Σελ .155

Α3. Σελ. 216

Α4. (α) Σ

(β) Σ

(γ) Λ

(δ) Λ

(ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$h(x) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 1, Af = (1, +\infty)$$

Β1. $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$r(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$$

Β2

f συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως ρητή

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)(x-1)} \prec 0$, στο $(1,+\infty)$, f γν.φθιν, άρα 1-1 δλδ $\exists f^{-1}$

f συνεχής και $\nearrow$ στο $A=(1,+\infty)$, άρα

$f(A)=(\lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x)) = (1,+\infty)=Af^{-1}$

θέτω $y=f(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$, άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, x \succ 1$

ΣΥΝΕΠΩΣ $f^{-1} = f$

B3.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{r(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0\end{array}\right| y=x \text{ πλάγια ασύμπτωτη στο } +\infty$$

B4.

$\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)^2=1+4r(x)\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow(x-4)\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=4$ ή x=1 (απορ) ή x=-1 (απορ)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=e^{\lambda}\\ \lim\limits_{x\to2^-}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)=-4+8-3+\lambda=1-\lambda\end{array}\right\} e^{\lambda}=1-\lambda \quad (1)$$

Θέτω g(x)=e^x+x-1, προφανής ρίζα x=0

g'(x)=$e^x+1>0$ και g συνεχής ως πράξεις συνεχών

άρα g γν.αύξουσα και το x=0 μοναδική ρίζα.

Οπότε (1) g(λ)=0 $\Leftrightarrow$ λ=0

Γ2.

$f(x)=\begin{cases}-2x+5, & 0\le x\prec 2\\ -x^2+4x-3. & x\ge 2\end{cases}$ f(2)=1

f συνεχής

$$\lim_{x\to2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{-2x+4}{x-2}=-2$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=0$$

Δεν υπάρχει το f '(2).

$f'(x)=\begin{cases}-2, & 0\le x\prec 2\\ -2x+4, & x\succ 2\end{cases}$

Για $x\succ 2$, -2x+4=0 $\Leftrightarrow$ x=2

Η f γν αυξ στο $[0,+\infty)$ κ μέγιστο το $f(0)=5$

οπότε $f(x)\le 5,\ \forall x\ge 0.$

Γ3.

i)Δεν είναι παραγωγίσιμη στο x=2 , άρα δεν ισχύει το ΘΜΤ στο [0,3].

$\exists\ \xi \in (0,3)$: εφ της f στο $(\xi, f(\xi))\ //\ \Delta E$

$\Delta(0,5), E(3,0)$, $\lambda_{\Delta E} = \dfrac{5}{-3}$

άρα $f'(\xi) = -\dfrac{5}{3}$

ii) Για $x \in [0,2)$, $f'(x) = -2 = -\dfrac{5}{3}$, αδύνατη.

Για $x \in (2,3]$, $-2x+4 = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -6x+12 = -5 \Leftrightarrow 6x = 17 \Leftrightarrow x = \dfrac{17}{6} \succ 2$

άρα υπάρχει $\xi \in (0,3)$: $f'(\xi) = -\dfrac{5}{3}$

Γ4.

$y'(t) = 0,5 \quad {}^{\mu}\!/\!_{s}$

$y(t_0) = f(2) = 1$

$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{y}{2}$

$\varepsilon\varphi\omega(t) = \dfrac{y(t)}{2} \Rightarrow \dfrac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} = \dfrac{y'(t)}{2} = \dfrac{1}{4}$ οπότε $t = t_0$.

$\omega'(t_0) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)}{4} = \dfrac{\frac{4}{5}}{4} = \dfrac{1}{5}$ μ/s

Γιατί την στιγμή $t_0, AM = y(t_0) = 1$

Από Π.Θ. $(OM)^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Leftrightarrow OM = \sqrt{5}$

$\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε x>0 $f(x) \le 1+\frac{1}{e}$

- f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών
- f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\cdot x-(\ln x+\alpha x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1+\cancel{\alpha x}-\ln x-\cancel{\alpha x}}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

x	$-\infty$	0		e		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$	
$f(x)$			$\uparrow$	ομ	$\downarrow$	

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$
- $f'(x)>0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e \overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow} x<e$ άρα $x\in(0,e)$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \Leftrightarrow x>e$

Η f παρουσιάζει στο $x_0=e$ ολικό μέγιστο το $f(e)$

$$f\left((0,e]\right) \underset{f\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f\uparrow(0,e]}{=}} \left(\ln_{x\to0^+} f(x), f(e)\right]=\left(-\infty,\frac{1}{e}+\alpha\right]$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x+\alpha x}{x}=\lim_{x\to0^+}\left[\left(\ln x+\alpha x\right)\cdot\frac{1}{x}\right]\overset{(-\infty)(+\infty)}{=}-\infty$$

$$f(e)=\frac{\ln e+\alpha e}{e}=\frac{1+\alpha e}{e}=\frac{1}{e}+\alpha$$

$$f\left((e,+\infty)\right) \underset{f\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f\downarrow(e,+\infty)}{=}} \left(\ln_{x\to+\infty} f(x), \ln_{x\to e^+} f(x)\right)=\left(\alpha,\frac{1}{e}+\alpha\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+\alpha x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{\alpha x}{x}\right)=0+\alpha=\alpha$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\frac{1}{x}=0$$

$$f\left((0,e]\right)\overset{f\uparrow}{=}(-\infty,\frac{1}{e}+\alpha) \qquad f\left([e,+\infty)\right)=\left(0,\frac{1}{e}+\alpha\right]$$

$$\left.\begin{aligned} & f\left([e,+\infty)\right)\overset{f\downarrow}{=}\left(\alpha,\frac{1}{e}+\alpha\right] \\ & \acute{o}\mu\omega\varsigma\ f\left((0,+\infty)\right)=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right] \end{aligned}\right\}\frac{1}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+1 \Leftrightarrow \alpha=1$$

Δ2. $f(x)=\dfrac{\ln x+x}{x}=\dfrac{\ln x}{x}+1$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1<0 \\ f(1)=1>0 \\ f\,\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\left[\dfrac{1}{2},1\right] \end{array}\right\}\xrightarrow{\Theta B}\text{υπάρχει}\ \begin{array}{l} x_0\in(\frac{1}{2},1): f(x_0)=0\,\kappa\alpha\iota\, f\uparrow\sigma\tau o\left[\frac{1}{2},1\right] \\ \text{Άρα } x_0\ \text{μοναδικό στο } (0,e] \end{array}$$

$f\left(\left[e,+\infty\right)\right)=\left(1,\dfrac{1}{e}+1\right]$ Το $0\notin f\left(\left[e,+\infty\right)\right)$ *Άρα το* x_0 είναι μοναδική ρίζα στο $\left(0,+\infty\right)$

η οποία βρίσκεται στο $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

Δ3. i) $f(4)=\frac{ln4}{4}+1=\frac{ln2}{2}+1=f(2)$

f(x)=f(4) με f 1 προς 1 και γνησίως φθίνουσα στο [e,+∞) επομένως x=4

και f(x)=f(2) με f είναι 1 προς 1 και γνησίως αύξουσα στο (0,e] επομένως x=2

ii) $2^x\leq x^2$ επομένως $ln2^x\leq lnx^2$ → xln2 ≤ 2lnx → $\frac{ln2}{2}\leq\frac{lnx}{x}$ → $\frac{ln2}{2}+1\leq\frac{lnx}{x}+1$

άρα f(x) ≥f(4) ή f(x) ≥f(2)

f(x) ≥f(4) με f γνησίως φθίνουσα στο [e,+∞) τότε x ≤ 4 και x ≥ e αρα e ≤ x ≤ 4

ή f(x) ≥f(2) με f γνησίως αύξουσα στο (0,e] τότε x ≥ 2 και x ≤ e άρα 2 ≤ x ≤e

άρα $x\in\left[2,4\right]$

Δ4. $g(x)=f(e^x)\cdot\dfrac{1-x}{e^x}$

$$E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}\left|g(x)\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}\right|dx$$

$g(x)=\dfrac{x+e^x}{e^x}\cdot\dfrac{1-x}{e^x}$ Θέτω $\left.\begin{array}{l} u=e^x \\ du=e^x dx \end{array}\right| x=\ln u$

$$x=-\ln 2: u=\frac{1}{2}$$
$$x=0: u=1$$

$$E(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}\right|du$$
$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)f'(u)\right|du$$

$$f'(x)>0\,\forall x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$$

Η f έχει μοναδική ρίζα $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ για $x<x_0\overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0)=0$

$$\mathrm{E}(\Omega)=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(x)\cdot f'(x)dx+\int_{x_0}^{1} f(x)\cdot f'(x)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]_{x_0}^{1}$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^2(1)-0$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\ln 4\right)^2+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1-2\ln 4+\ln^2 4+1}{2}=1-\ln 4+2\ln^2 2$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ & ΡΑΦΗΝΑΣ

ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ

ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ