

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ - ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. Μονάδες 5

A3. « Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0 \text{ »}.$$

Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση, γράφοντας στο τετράδιο σας το χαρακτηρισμό *Σωστή*, αν είναι σωστή, ή το χαρακτηρισμό *Λανθασμένη*, αν είναι λανθασμένη (Μονάδα 1). Κατόπιν αιτιολογήστε την απάντησή που δώσατε. (Μονάδες 3) (Μονάδες 4)

A4. Σημειώστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις: Μονάδες 10

(α) Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ μπορεί να διαπερνά την C_f .

(β) Το σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον x' , είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

(γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και είναι $f(x_0) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0 .

(δ) Αν $A(x_0, y_0)$ σημείο της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης και συνεχούς συνάρτησης f , τότε θα είναι $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$.

(ε) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^2} = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell > 0$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, που είναι γνησίως μονότονη και με γραφική παράσταση που διέρχεται από τα $A(1,3)$, $B(3,5)$.

B1. Βρείτε την μονοτονία της f . Μονάδες 6

B2. Λύστε την εξίσωση: $f(f(e^{5-x})) = 5$ Μονάδες 6

B3. Δείξτε ότι αντιστρέφεται και βρείτε τις τιμές $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(f^{-1}(5))$. Μονάδες 6

B4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f^{-1}(x^2 + 4x) - 2) < 3$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $\varphi(x) = e^x + x - 5$ $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία. Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $x_0 \in \mathbb{R}$.
Μονάδες 6

Γ3. Δείξτε ότι για κάθε σημείο $M(x, \varphi(x))$ της γραφικής παράστασης της φ , απέχει από την ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 5$ απόσταση

$$d(x) = \frac{e^x - x}{\sqrt{5}} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{Μονάδες 6}$$

Γ4. Να προσδιορίσετε το σημείο K της γραφικής παράστασης της φ , στο οποίο η παραπάνω απόσταση από την ευθεία ε γίνεται ελάχιστη.
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Ευθεία ε περιστρέφεται γύρω από το σημείο της $P(4,3)$ διατηρώντας θετικό το συντελεστή διεύθυνσής της λ , ο οποίος μεταβάλλεται με ρυθμό 4 μονάδες το λεπτό. Κατά την διάρκεια της περιστροφής, η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B .

Δ1. Να υπολογίσετε το ρυθμό που μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου OAB , τη στιγμή $t = t_0$ κατά την οποία η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $K(-2,2)$.
Μονάδες 7

Κατά την παραπάνω χρονική στιγμή t_0 η ευθεία ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \mu\sqrt{x+\nu}$ $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ στο σημείο P .

Δ2. Να προσδιορίσετε τις τιμές των μ, ν . *Μονάδες 6*

Δ3. Αν $\mu = 1, \nu = 5$ να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση. *Μονάδες 6*

Δ4. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση g που είναι η σύνθεση της f με την f^{-1} και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1}, g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Μονάδες 6

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ