ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 145 (i)

Α2. Σχολικό σελίδα 183

Α3. Λανθασμένη γιατί π.χ. αν $f(x)=x$, $\quad g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x=0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$$

Αλλά το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)g(x)\big)$ δεν υπάρχει αφού τα πλευρικά του δεν είναι ίσα.

$$\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=+\infty$$

Α4. **(α)** Σωστή, **(β)** Σωστή, **(γ)** Σωστή, **(δ)** Σωστή, **(ε)** Λανθασμένη

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι f γνησίως μονότονη και $f(1)=3<5=f(3)$. Άρα f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β2. Η f είναι "1-1" ως γνησίως μονότονη.

$$f\big(f(e^{5-x})\big)=5 \Leftrightarrow f\big(f(e^{5-x})\big)=f(3) \overset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f(e^{5-x})=3 \Leftrightarrow f(e^{5-x})=f(1) \overset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow e^{5-x}=1 \Leftrightarrow x=5$$

Β3. Η f είναι αντιστρέψιμη ως "1-1".

$$f(1)=3 \Leftrightarrow f^{-1}(3)=1$$

$$f(3)=5 \Leftrightarrow f^{-1}(5)=3 \quad \text{και έτσι} \quad f^{-1}\big(f^{-1}(5)\big)=f^{-1}(3)=1$$

B4. Επειδή $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$ και η f αντιστρέφεται, η αντίστροφη f^{-1} ορίζεται στο $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$. Επομένως η ανίσωση $f\left(f^{-1}(x^2+4x)-2\right)<3$ ορίζεται αν $x^2+4x>0 \Leftrightarrow x<-4$ ή $x>0$ (1)

$$
\begin{aligned}
f\left(f^{-1}(x^2+4x)-2\right)<3 &\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x^2+4x)-2\right)<f(1) \Leftrightarrow \\
&\overset{\text{γν.αύξ}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x^2+4x)-2<1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+4x)<3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+4x)<f^{-1}(5) \overset{\text{γν.αύξ}}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow x^2+4x<5 \Leftrightarrow x^2+4x-5<0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -5<x<1 \quad (2)
\end{aligned}
$$

Αρα από (1) και (2) θα είναι $x\in(-5,-4)\cup(0,1)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. φ συνεχής ως άθροισμα συνεχών με $\varphi'(x)=e^x+1>0$. Άρα φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\ldots=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\ldots=-\infty$

Έτσι το σύνολο τιμών είναι

$$\varphi(\mathbb{R})\overset{\varphi\text{ γν.αύξ}}{=}\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

$0\in\varphi(\mathbb{R})$ και φ γν.αύξουσα Έτσι υπάρχει μοναδικό x_0 ώστε $\varphi(x_0)=0$

Γ3. Κάθε σημείο $M(x,\varphi(x))$ της C_φ απέχει από την ευθεία ε απόσταση $d(x)=d(K,e)=\dfrac{|2x-\varphi(x)-5|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{|x-e^x|}{\sqrt{5}}\overset{(1)}{=}\dfrac{e^x-x}{\sqrt{5}}$

Αν $g(x)=e^x-x \quad x\in\mathbb{R}$ τότε $g'(x)=e^x-1$

Για $x>0 \quad g'(x)>0$, ενώ για $x<0 \quad g'(x)<0$.

Στο $x_0=0$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $g(0)=1$.

Δηλαδή $g(x)\geq 1>0 \Leftrightarrow e^x-x>0 \quad x\in\mathbb{R}$ (1)

Γ4. $d'(x)=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{5}}$ με $d'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Έτσι $d'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$ και $d'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

Άρα η απόσταση $d(x)$ γίνεται ελάχιστη για $x=0$.

Τότε το σημείο είναι $K(0,-4)$

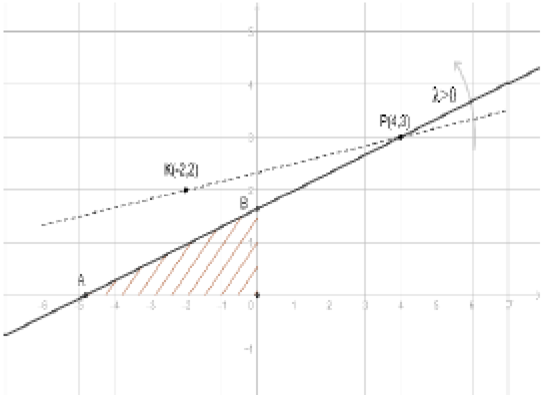
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Τα μεταβλητά μεγέθη που θα μας απασχολήσουν είναι το εμβαδόν E και ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ε.

Η ευθεία ε έχει εξίσωση:

$y-3=\lambda(x-4) \quad \lambda>0 \quad (1)$

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία Α, Β.



Η (1) για $y=0$ δίνει $x_A=\dfrac{4\lambda-3}{\lambda}$ και πάλι η (1) για $x=0$ δίνει $y_B=3-4\lambda$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι

$$E=\tfrac{1}{2}(OA)(OB)=\tfrac{1}{2}|x_A|\,|y_B|=\frac{(4\lambda-3)^2}{2\lambda}.$$

Για κάθε χρονική στιγμή t είναι $E(t)=\dfrac{(4\lambda(t)-3)^2}{2\lambda(t)}$ και τότε

$$E'(t)=\frac{2(4\lambda(t)-3)\,4\lambda'(t)\lambda(t)-(4\lambda(t)-3)^2\lambda'(t)}{2\lambda^2(t)}=$$

$$=(4\lambda(t)-3)\lambda'(t)\frac{4\lambda(t)+3}{2\lambda^2(t)}=$$

$$=\lambda'(t)\frac{16\lambda^2(t)-9}{2\lambda^2(t)}=2\frac{16\lambda^2(t)-9}{\lambda^2(t)} \qquad (\lambda'(t)=4)$$

Τη στιγμή t_0 που η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Κ είναι

$$\lambda(t_0)=\lambda_{PK}=\frac{3-2}{4+2}=\frac{1}{6}$$

Επομένως $E'(t_0)=2\dfrac{16\lambda^2(t_0)-9}{\lambda^2(t_0)}=-616\ \mu^2/\min$

Δ2. Στο σημείο επαφής P ισχύουν:

$$f(4)=3 \Leftrightarrow \mu\sqrt{4+\nu}=3 \quad (2)$$

$$f'(4)=\lambda(t_0)=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\mu}{2\sqrt{4+\nu}}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow 6\mu=2\sqrt{4+\nu} \quad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει: $\mu=1,\ \nu=5$

Δ3. Είναι $f(x)=\sqrt{x+5}$, $x\geq -5$ συνεχής στο $[-5,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}>0$, $x>-5$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-5,+\infty)$ και έτσι είναι 1-1. Άρα αντιστρέφεται.

$$\begin{aligned} x\geq -5 \quad y=f(x)=\sqrt{x+5} & \\ \Leftrightarrow y^2=x+5 &\quad \text{με } y\geq 0 \\ \Leftrightarrow x=y^2-5 &\quad \text{και ισχύει } x\geq -5 \end{aligned}$$

Άρα η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x)=x^2-5,\ x\geq 0$

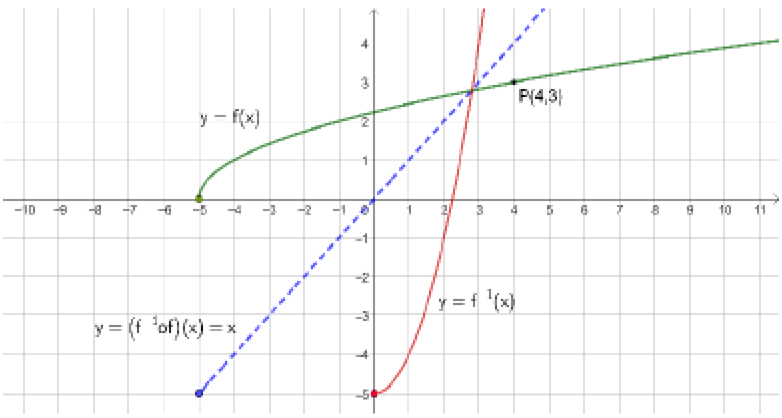
Δ4. Γνωρίζουμε ότι $(f^{-1}\circ f)(x)=x \quad x\in D_f$

Άρα η ζητούμενη σύνθεση ορίζεται και έχει τύπο

$$g(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x, \quad x\in[-5,+\infty)$$

Η γραφική παράσταση της f σχεδιάζεται, αφού μεταφέρουμε κατά 5 μονάδες αριστερά την γραφική παράσταση της βασικής συνάρτησης $y=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Επίσης η αντίστροφη έχει γραφική παράσταση συμμετρική της C_f ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



———————

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ
ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ