

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** (α) Να διατυπώσετε και στη συνέχεια να αποδείξετε το θεώρημα των Ενδιάμεσων τιμών για συνεχή συνάρτηση F σε διάστημα $[\alpha, \beta]$.
(Μονάδες 5)
- (β) Πότε μια συνάρτηση F ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται γνησίως αύξουσα και πότε "1-1" στο Δ ;
(Μονάδες 3)
- (γ) Πότε μια συνάρτηση F λέγεται συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$;
(Μονάδες 3)
- A2.** Να εξετάσετε την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων, σημειώνοντας στο τετράδιό σας Σωστή ή Λανθασμένη..
(Μονάδες 6)
- (i) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο Δ .
- (ii) Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση μιας "1-1" συνάρτησης το πολύ σ' ένα σημείο.
- (iii) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα Δ έχει ακρότατα.
- A3.** Έστω η πρόταση: << Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ >>.
Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση, γράφοντας στο τετράδιό σας το χαρακτηρισμό Σωστή, αν είναι σωστή, ή το χαρακτηρισμό Λανθασμένη, αν είναι λανθασμένη (Μονάδα 1). Κατόπιν αιτιολογήστε την απάντησή που δώσατε. (Μονάδες 3)
(Μονάδες 4)

A4. Να αντιστοιχίσετε τα όρια της 1^{ης} στήλης με τις αντίστοιχες τιμές τους στην 2^η στήλη.

1 ^η στήλη (όρια)		2 ^η στήλη (τιμές ορίων)	
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$	1	α	0
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$	2		
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2022}{x}$	3	β	1
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$	4		
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2022}{x^2}$	5	γ	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$	6		
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$	7	δ	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$	8		

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνεται συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , 1 < x < 3 \\ e^{x-3} - e^2 & , 3 < x \leq 5 \end{cases}$.

(α) Να εξετάσετε την f ως προς την συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.
(Μονάδες 7)

(β) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της όταν $x \in (3, 5]$. (Μονάδες 8)

B2. Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $h(x) = x^3 + \ln x - e$ για κάθε $x > 0$ με:

- g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- $(g \circ f)(x) = h(x)$ για κάθε $x > 0$

(α) Δείξτε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. (5 μονάδες)

(β) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} \Phi(x)$ όταν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\Phi(2x) - 5}{2x^2 - 7x} = -\infty$. (10 μονάδες)

Γ2. Να υπολογίζετε το $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. (15 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $xf(x) + 3\eta\mu x = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρεθεί ο τύπος της f . (Μονάδες 8)

Δ2. Να υπολογιστούν τα όρια **(α)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ (Μονάδες 5)

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{22^{f(x)} - 21^{f(x)}}{2022^{f(x)} - 2021^{f(x)}}$ (Μονάδες 5)

Δ3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 4e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα. (Μονάδες 7)

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ