Θέμα Α

Α1,Α2,Α3 από το σχολικό βιβλίο.

Α4.

1. Είναι σωστό γιατι η f είναι συνεχής στο[0,10] άρα έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.και αφού είναι γνησίως αυξουσα η ελάχιστη τιμή είναι στο 0 και η μέγιστη είναι στο 10 το f(10)=10

2. Είναι λάθος γιατι f([5,10])=[f(5),f(10)]=[2,10] αφου f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής

3. Είναι σωστό γιατι η f είναι συνεχής στο[0,5] και f(0)f(5)<0 άρα απο θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 (0,5) τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_0)=0$

4. Είναι λάθος γιατι η f ως γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο [0,10] δεν έχει άλλη θέση ακροτάτου εκτος από το 0 και το 10.Άρα δεν υπάρχει εσωτερικό σημείο x_1 του (0,10) στο οποίο να ισχύει $f'(x_1)=0$, οπότε δεν μπορει να εχει η Cf οριζόντια εφαπτομένη σε εσωτερικό σημείο του (0,10)

Θέμα Β

Β1) Αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x+\alpha\right)=1+\alpha \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(x+\beta)\right)=\ln\beta=f(0) \end{array}\right\} \text{άρα } f(0)=1+\alpha=\ln\beta \quad (1)$$

f παραγωγίσιμη στο 0:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+\alpha-1-\alpha}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+\beta)-\ln\beta}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+\beta}}{1}=\frac{1}{\beta}$$

άρα $\frac{1}{\beta}=1\Leftrightarrow\beta=1$ και από (1): $\alpha=-1$

$$f(x)=\begin{cases} e^x-1 & , \ x<0 \\ \ln(x+1) & , \ x\geq 0 \end{cases}$$

B2) Για $x<0: f'(x)=e^x$ και $f''(x)=e^x>0$ για κάθε $x<0$

άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0)$

Για $x>0$: $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ και $f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}<0$ για κάθε $x>0$

άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$

x		0	
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα το σημείο $O(0,0)$ είναι το σημείο καμπής της C_f

B3) Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,f(0))$ είναι :

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ άρα η εφαπτομένη της είναι κάτω από την C_f για κάθε $x<0$ άρα $f(x)>x$ για κάθε $x<0$ (2)

Η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ άρα η εφαπτομένη της είναι πάνω από την C_f για κάθε $x>0$ άρα $f(x)<x$ για κάθε $x>0$ (3)

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x-2}{f(x)-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{1}{f(x)-x}(\eta\mu x-2)\right]\overset{*}{=}-\infty$

*έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}(\eta\mu x-2)=-2$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)-x}=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f(x)-x\right)=0$ και $f(x)-x>0$ για κάθε $x<0$ από (2)

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x-2}{f(x)-x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{f(x)-x}(\eta\mu x-2)\right]\overset{**}{=}+\infty$

**έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x-2)=-2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)-x}=-\infty$ γιατί $f(x)-x<0$ για κάθε $x>0$ από (3)

Συνεπώς το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-2}{f(x)-x}$ δεν υπάρχει.

Β4)

$$g(x)=\begin{cases} e^x-1, \text{αν x<0} \\ 10x-2021+\dfrac{1}{e^x+x^2}, \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x-1)=1-1=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(10x-2021+\dfrac{1}{e^x+x^2})=-2021+1=-2020$

Άρα g είναι ασυνεχής στο 0 ,όμως η ευθεία x=0 δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf

• $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(e^x-1)=-1$, Αρα η ευθεία y=-1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο -∞

• $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}(10-\dfrac{2021}{x}+\dfrac{1}{x(e^x+x^2)})=10$

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2021}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} x(e^x+x^2)=+\infty \to \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x(e^x+x^2)}=0$

• $\lim\limits_{x\to +\infty}(g(x)-10x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(-2021+\dfrac{1}{e^x+x^2})=-2021+0=-2021$

Άρα η ευθεία y=10x-2021 είναι πλάγια ασύμπτωτη της ης Cf στο +∞

Θέμα Γ

Γ1) Για τα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{\Delta E\Gamma}$ έχουμε: $\hat{\Gamma}$ κοινή γωνία και $\hat{\Delta}=\hat{A}=90^o$ άρα τα τρίγωνα είναι

όμοια και ισχύει: $\dfrac{E\Gamma}{B\Gamma}=\dfrac{\Delta E}{AB}\Leftrightarrow\dfrac{E\Gamma}{10-x}=\dfrac{x}{5}\Leftrightarrow E\Gamma=\dfrac{x(10-x)}{5}=\dfrac{-x^2+10x}{5}$

επίσης

$$\left.\begin{array}{r} B\Gamma>0\Leftrightarrow 10-x>0\Leftrightarrow x<10 \\ \text{και } \Delta E>0\Leftrightarrow x>0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0<x<10$$

Συνεπώς η ΕΓ δίνεται από τη συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{-x^2+10x}{5}$ με $0<x<10$

Γ2) f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=\frac{-2x+10}{5},\ f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+10=0 \Leftrightarrow x=5$$

x	0	5	10
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Η f έχει μέγιστη τιμή για $x=5$ την $f(5)=5$

Άρα το ΕΓ γίνεται μέγιστο για $x=5$

Γ3) Από το (2) έχουμε $f(x)\le f(5)=5$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=5$.

Έστω $\alpha\neq 5$ και $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ τότε :

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha)<5 \\ f(\beta)\le 5 \\ f(\gamma)\le 5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)<15$$ Άτοπο άρα $\alpha=5$, ομοίως $\beta=\gamma=5$

Γ4) $f''(x)=-\frac{2}{5}<0$ άρα $f'\downarrow(0,10)$

Για $x\in(0,5)$: η f παραγωγίσιμη στο $[x,x+5]$ από Θ.Μ.Τ

υπάρχει $\xi\in(x,x+5): f'(\xi)=\frac{f(x+5)-f(x)}{5}$

Έχουμε

$$x<\xi<x+5 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi)>f'(x+5) \Leftrightarrow \frac{-2x+10}{5}>\frac{f(x+5)-f(x)}{5}>\frac{-2(x+5)+10}{5}$$

$$\Leftrightarrow -2x+10>f(x+5)-f(x)>-2x$$

Θέμα Δ

$$f(x)=\ln(x-\eta\mu x),\ x\in(0,\pi]$$

Δ1) - η f είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών

- η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων

με $f'(x)=\frac{1}{x-\eta\mu x}\cdot(1-\sigma\upsilon\nu x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$

διότι : για $x>0$ ισχύει $\eta\mu x<x \Leftrightarrow x-\eta\mu x>0$

για $x\in(0,\pi)$ ισχύει $1-\sigma\upsilon\nu x>0$

άρα $f \uparrow (0,\pi]$ άρα f $1-1$ άρα f αντιστρέψιμη

- $D_{f^{-1}} = f\left((0,\pi]\right) \underset{f \text{ συνεχής}}{\overset{f\uparrow(0,\pi]}{=}} \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(\pi)\right] = (-\infty, \ln\pi]$

$f(\pi) = \ln(\pi - \eta\mu\pi) = \ln\pi$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x - \eta\mu x) \underset{\substack{u_0 = \lim\limits_{x\to 0^+}(x-\eta\mu x)=0 \\ x-\eta\mu x>0 \ \ \text{για } x>0}}{\overset{u=x-\eta\mu x}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

Δ2) - η $f \uparrow (0,\pi]$ άρα $f^{-1} \uparrow (-\infty, \ln\pi]$

-Άρα $f^{-1}\left(D_{f^{-1}}\right) \underset{f^{-1} \text{συνεχής}}{\overset{f^{-1}\uparrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to -\infty} f^{-1}(x), f^{-1}(\ln\pi)\right]$

όμως $f^{-1}\left(D_{f^{-1}}\right) = D_f = (0,\pi]$

άρα $\lim\limits_{x\to -\infty} f^{-1}(x) = 0$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{xf^{-1}(x) + x}{x - \eta\mu x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(f^{-1}(x)+1\right)}{x\left(1 - \dfrac{\eta\mu x}{x}\right)} \overset{*}{=} \frac{0+1}{1-0} = 1$$

$* \left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| \le \left|\dfrac{1}{x}\right| \Leftrightarrow -\left|\dfrac{1}{x}\right| \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \left|\dfrac{1}{x}\right|$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{x}\right|\right) = 0 = \lim\limits_{x\to -\infty}\left|\dfrac{1}{x}\right|$ άρα απο Κ.Π και $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$

Δ3) – η f' είναι παραγωγίσιμη στο (0,π) ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f''(x) = \frac{\eta\mu x(x - \eta\mu x) - (1-\sigma\upsilon\nu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(x-\eta\mu x)^2} = \frac{x\,\eta\mu x - \eta\mu^2 x - (1-\sigma\upsilon\nu x)^2}{(x-\eta\mu x)^2} =$$

$$= \frac{x\,\eta\mu x - \eta\mu^2 x - 1 + 2\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{(x-\eta\mu x)^2} = \frac{x\,\eta\mu x - 2 + 2\sigma\upsilon\nu x}{(x-\eta\mu x)^2}$$

για $x \in (0,\pi)$ $(x-\eta\mu x)^2 > 0$

Θέτουμε $g(x) = x\,\eta\mu x - 2 + 2\sigma\upsilon\nu x, x \in [0,\pi]$

-η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών

-η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$g'(x) = \eta\mu x + x\,\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x = x\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

-η g' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$g''(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\,\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -x\,\eta\mu x \le 0$

με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = \pi$ όπου g' συνεχής άρα $g' \downarrow [0,\pi]$

x	$-\infty$	0		π	$+\infty$
$g'(x)$		0	$-$ ↘		
$g(x)$			↘		

$g'(0)=0$

$0<x<\pi \overset{g'\downarrow}{\Leftrightarrow} g'(0)>g'(x)>g'(\pi) \Leftrightarrow -\pi<g'(x)<0 \;\; \alpha\rho\alpha \;\; g\downarrow[0,\pi]$

$0<x<\pi \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(0)>g(x)>g(\pi) \;\; \alpha\rho\alpha \;\; g(x)<0$ για $x\in(0,\pi)$

$f''(x)=\dfrac{g(x)}{(x-\eta\mu\, x)^2}<0$ για $x\in(0,\pi)$

άρα f είναι κοίλη στο $(0,\pi]$ και η C_f δεν έχει Σ.Καμπής

Δ4) -η f είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ άρα και σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right] \kappa\alpha\iota \left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$

-η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ άρα και σε καθένα από τα διαστήματα $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right) \kappa\alpha\iota \left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$

Άρα από ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$ τέτοια ώστε :

$$\begin{cases} f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{2\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}}=\dfrac{f\left(\frac{2\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}} \\[2ex] f'(\xi_2)=\dfrac{f(\pi)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\pi-\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{f(\pi)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}} \end{cases}$$

Για τα $\xi_1,\xi_2\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$ με $\xi_1<\xi_2$ έχουμε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\frac{f\left(\frac{2\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}+\frac{f\left(\pi\right)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}=\frac{f\left(\pi\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{\ln\pi-\ln\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\pi}{3}}=\frac{\ln\pi-\ln\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}}{\frac{\pi}{3}}=\frac{\ln\frac{\pi}{\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{6}}}{\frac{\pi}{3}}=\frac{\ln\frac{6\pi}{2\pi-3\sqrt{3}}}{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{3}{\pi}\ln\frac{6\pi}{2\pi-3\sqrt{3}}=\ln\left(\frac{6\pi}{2\pi-3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{\pi}}$$

Δ5) Για $x\in\left(0,\pi\right]$

$$\frac{\pi-2\sqrt{2}}{4}+\eta\mu\,x^2\le x^2\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}-\frac{2\sqrt{2}}{4}\le x^2-\eta\mu\,x^2\overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\sqrt{2}}{4}\right)\le\ln\left(x^2-\eta\mu\,x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow {}^{*}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\le f\left(x^2\right)\overset{f\uparrow(0,\pi]}{\Leftrightarrow}\frac{\pi}{4}\le x^2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{\pi}}{2}\le|x|\Leftrightarrow x\le-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \text{ ή }\ x\ge\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

*Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει

$$x^2\in\left(0,\pi\right]\Leftrightarrow 0<x^2\le\pi\Leftrightarrow 0<|x|\le\sqrt{\pi}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|>0\Leftrightarrow x\ne 0\\|x|\le\sqrt{\pi}\Leftrightarrow-\sqrt{\pi}\le x\le\sqrt{\pi}\Leftrightarrow x\in(0,\sqrt{\pi}]\\\text{και }\ x\in(0,\pi]\end{cases}$$

Άρα $x\in\left(0,\sqrt{\pi}\right]$ και $x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{\pi}}{2}]\cup\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2},+\infty\right)$ οπότε $x\in\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2},\sqrt{\pi}\right]$

Δ6) Για $x\in\left(1,2\right)$:

$$\left(x-1\right)\left[f\left(2\beta\right)-f(\beta)-\beta f'\left(2\beta\right)\right]-\left(x-2\right)\left(1-e^{\beta}\right)=0$$

Θέτουμε $K\left(x\right)=\left(x-1\right)\left[f\left(2\beta\right)-f(\beta)-\beta f'\left(2\beta\right)\right]-\left(x-2\right)\left(1-e^{\beta}\right)$ $x\in\mathbb{R}$

-η K είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική άρα και στο $\left[1,2\right]$

- $K(1)=1-e^{\beta}<0$ και $K(2)=f\left(2\beta\right)-f(\beta)-\beta f'(2\beta)>0$

Γιατί:

$$0<\beta<\frac{\pi}{2}\overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} e^0<e^{\beta}\Leftrightarrow 1-e^{\beta}<0$$

$$0<\beta<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<2\beta<\pi$$

-η f είναι συνεχής στο $\left[\beta,2\beta\right]\subseteq\left(0,\pi\right]$

-η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\beta,2\beta\right)\subseteq\left(0,\pi\right)$

άρα από ΘΜΤ υπάρχει $x_0\in\left(\beta,2\beta\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(2\beta)-f(\beta)}{2\beta-\beta}\Leftrightarrow f'(x_0)=\dfrac{f(2\beta)-f(\beta)}{\beta}$

$$0<\beta<x_0<2\beta<\pi\underset{f'\downarrow(0,\pi)}{\overset{f\ \kappa o\acute{\iota}\lambda\eta}{\Leftrightarrow}} f'(x_0)>f'(2\beta)\Leftrightarrow\frac{f(2\beta)-f(\beta)}{\beta}>f'(2\beta)\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} f(2\beta)-f(\beta)-\beta f'(2\beta)>0$$

Άρα $K(1)\cdot K(2)<0$

άρα από ΘΒ υπάρχει $\xi\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $K(\xi)=0$

όμως $K(x)=\left[\underbrace{\left(f(2\beta)-f(\beta)-\beta f'(2\beta)\right)}_{+}-\underbrace{\left(1-e^{\beta}\right)}_{-}\right]x+\left(\ \right)$

άρα η K πολυωνυμική 1ου βαθμού άρα έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

άρα η εξίσωση $K(x)=0$ έχει μοναδική λύση η οποία ανήκει στο (1,2)

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ