Κριτήριο Αξιολόγησης στα Μαθηματικά Προσανατολισμού.

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο το x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής .
Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

i. Αν $f\,'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f\,'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . **Μονάδες 4**

ii. Αν η $f\,'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,\ x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).
Μονάδες 3+3

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Να ορίσετε την συνάρτηση της πρώτης παραγώγου της f . **Μονάδες 4**

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για μία συνάρτηση f. **Μονάδες 3**

Α4.Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [0,10], για την οποία υποθέτουμε ότι είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα , f(0)=-2,

f(5)=2 και f(10)=10.

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία απο τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή (Α)

η ψευδή (Ψ) και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

1. Η f έχει ελάχιστο στο 0 και μέγιστο το 10

2. f([5,10])=[-2,10]

3.Υπάρχει $x_0 \in (0,5)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$

4.Υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη της Cf σε κάποιο σημείο της με $x_1 \in (0,10)$ **Μονάδες 8**

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x+\alpha, & x<0 \\ \ln(x+\beta), & x\geq 0 \end{cases}$

Β1. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη. **Μονάδες 5**

Για α = -1 και β = 1

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής. **Μονάδες 5**

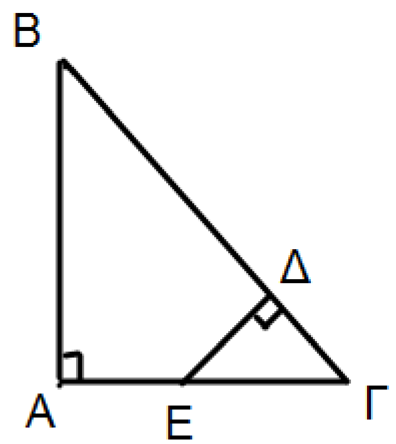
Β3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-2}{f(x)-x}$. **Μονάδες 7**

Β4.Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x), \alpha\nu\ x<0 \\ 10x-2021+\dfrac{1}{e^x+x^2}, \alpha\nu\ x\geq 0 \end{cases}$

Να μελετηθεί ως προς τις ασύμπτωτες **Μονάδες 8**

Θέμα Γ

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ΒΓ = 10 – x, ΑΒ = 5 και ΔΕ = x



Γ1. Να βρείτε την πλευρά ΕΓ ως συνάρτηση του x. **Μονάδες 6**

Αν η ΕΓ δίνεται από την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{-x^2+10x}{5}$, $\quad 0<x<10$

Γ2. Να βρείτε για ποιο x το ΕΓ γίνεται μέγιστο. **Μονάδες 5**

Γ3. Να βρεθούν α, β, γ ∈ (0,10) ώστε : $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=15$. **Μονάδες 6**

Γ4. Να δείξετε ότι για κάθε x ∈ (0,5) ισχύει: $-2x+10>f(x+1)-f(x)>-2x$

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-\eta\mu x), x\in(0,\pi]$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το $D_{f^{-1}}$.

Δ2. Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f, να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xf^{-1}(x)+x}{x-\eta\mu x}$.

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής (αν υπάρχουν).

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$ διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\ln\left(\frac{6\pi}{2\pi-3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{\pi}}.$$

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{\pi-2\sqrt{2}}{4}+\eta\mu x^2\le x^2$, για $x\in(0,\pi]$.

Δ6. Η εξίσωση $\dfrac{f(2\beta)-f(\beta)-\beta\cdot f'(2\beta)}{x-2}-\dfrac{1-e^{\beta}}{x-1}=0$, έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1,2)$, όταν $\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ
Επιμέλεια: Ε.ΛΙΑΚΟΥΡΑ Θ.ΜΑΛΑΚΗΣ Γ.ΚΑΠΡΑΛΟΣ