

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**  
**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Σχολικό σελίδα 145 (i)

**A2.** Σχολικό σελίδα 183

**A3.** Λανθασμένη γιατί π.χ. αν  $f(x) = x$ ,  $g(x) = -\frac{1}{x^2}$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Αλλά το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)g(x))$  δεν υπάρχει αφού τα πλευρικά του δεν είναι ίσα.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$$

**A4.** (α) Σωστή, (β) Σωστή, (γ) Σωστή, (δ) Σωστή, (ε) Λανθασμένη

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Είναι  $f$  γνησίως μονότονη και  $f(1) = 3 < 5 = f(3)$ . Άρα  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**B2.** Η  $f$  είναι "1-1" ως γνησίως μονότονη.

$$\begin{aligned}
 f(f(e^{5-x}))=5 &\Leftrightarrow f(f(e^{5-x}))=f(3) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f(e^{5-x})=3 \Leftrightarrow f(e^{5-x})=f(1) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow e^{5-x}=1 \Leftrightarrow x=5
 \end{aligned}$$

**B3.** Η  $f$  είναι αντιστρέψιμη ως "1-1".

$$f(1)=3 \Leftrightarrow f^{-1}(3)=1$$

$$f(3)=5 \Leftrightarrow f^{-1}(5)=3 \text{ και έτσι } f^{-1}(f^{-1}(5))=f^{-1}(3)=1$$

**B4.** Επειδή  $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$  και η  $f$  αντιστρέφεται, η αντίστροφη  $f^{-1}$  ορίζεται στο  $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$ . Επομένως η ανίσωση  $f(f^{-1}(x^2+4x)-2)<3$  ορίζεται αν  $x^2+4x>0 \Leftrightarrow x<-4$  ή  $x>0$  (1)

$$\begin{aligned}
 f(f^{-1}(x^2+4x)-2)<3 &\Leftrightarrow f(f^{-1}(x^2+4x)-2)<f(1) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+4x)-2<1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+4x)<3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f^{-1}(x^2+4x)<f^{-1}(5) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2+4x<5 \Leftrightarrow x^2+4x-5<0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -5<x<1 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Αρα από (1) και (2) θα είναι  $x \in (-5,-4) \cup (0,1)$ .

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.**  $\varphi$  συνεχής ως άθροισμα συνεχών με  $\varphi'(x)=e^x+1>0$ . Άρα  $\varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Γ2.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \dots = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \dots = -\infty$

Έτσι το σύνολο τιμών είναι

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687  
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

$$\varphi(\mathbb{R}) \stackrel{\text{φ γν. αύξ}}{=} \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$0 \in \varphi(\mathbb{R})$  και  $\varphi$  γν.αύξουσα Έτσι υπάρχει μοναδικό  $x_0$  ώστε  $\varphi(x_0) = 0$

**Γ3.** Κάθε σημείο  $M(x, \varphi(x))$  της  $C_\varphi$  απέχει από την ευθεία  $\varepsilon$  από-

$$\text{σταση } d(x) = d(K, e) = \frac{|2x - \varphi(x) - 5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|x - e^x|}{\sqrt{5}} \stackrel{(1)}{=} \frac{e^x - x}{\sqrt{5}}$$

Αν  $g(x) = e^x - x$   $x \in \mathbb{R}$  τότε  $g'(x) = e^x - 1$

Για  $x > 0$   $g'(x) > 0$ , ενώ για  $x < 0$   $g'(x) < 0$ .

Στο  $x_0 = 0$  παρουσιάζει ελάχιστη τιμή  $g(0) = 1$ .

Δηλαδή  $g(x) \geq 1 > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$   $x \in \mathbb{R}$  (1)

**Γ4.**  $d'(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{5}}$  με  $d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Έτσι  $d'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$  και  $d'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Άρα η απόσταση  $d(x)$  γίνεται ελάχιστη για  $x = 0$ .

Τότε το σημείο είναι  $K(0, -4)$

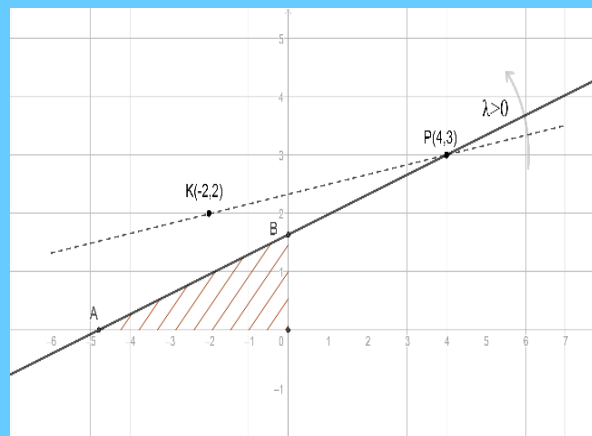
### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Τα μεταβλητά μεγέθη που θα μας απασχολήσουν είναι το εμβαδόν  $E$  και ο συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  της ευθείας  $\varepsilon$ .

Η ευθεία  $\varepsilon$  έχει εξίσωση:

$$y - 3 = \lambda(x - 4) \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

Η  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες στα σημεία  $A, B$ .



Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687  
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

Η (1) για  $y = 0$  δίνει  $x_A = \frac{4\lambda - 3}{\lambda}$  και πάλι η (1) για  $x = 0$  δίνει  $y_B = 3 - 4\lambda$ .

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι

$$E = \frac{1}{2} (OA)(OB) = \frac{1}{2} |x_A| |y_B| = \frac{(4\lambda - 3)^2}{2\lambda}.$$

Για κάθε χρονική στιγμή  $t$  είναι  $E(t) = \frac{(4\lambda(t) - 3)^2}{2\lambda(t)}$  και τότε

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{2(4\lambda(t) - 3) 4\lambda'(t)\lambda(t) - (4\lambda(t) - 3)^2 \lambda'(t)}{2\lambda^2(t)} = \\ &= (4\lambda(t) - 3)\lambda'(t) \frac{4\lambda(t) + 3}{2\lambda^2(t)} = \\ &= \lambda'(t) \frac{16\lambda^2(t) - 9}{2\lambda^2(t)} = 2 \frac{16\lambda^2(t) - 9}{\lambda^2(t)} \quad (\lambda'(t) = 4) \end{aligned}$$

Τη στιγμή  $t_0$  που η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο K είναι

$$\lambda(t_0) = \lambda_{PK} = \frac{3 - 2}{4 + 2} = \frac{1}{6}$$

Επομένως  $E'(t_0) = 2 \frac{16\lambda^2(t_0) - 9}{\lambda^2(t_0)} = -616 \mu^2 / \text{min}$

**Δ2.** Στο σημείο επαφής P ισχύουν:

$$f(4) = 3 \Leftrightarrow \mu\sqrt{4+v} = 3 \quad (2)$$

$$f'(4) = \lambda(t_0) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\mu}{2\sqrt{4+v}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6\mu = 2\sqrt{4+v} \quad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει:  $\mu = 1, v = 5$

**Δ3.** Είναι  $f(x) = \sqrt{x+5}$ ,  $x \geq -5$  συνεχής στο  $[-5, +\infty)$  ως σύνθεση συνεχών

με  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$ ,  $x > -5$ . Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο

$[-5, +\infty)$  και έτσι είναι 1-1. Άρα αντιστρέφεται.

$$\begin{aligned}
 x \geq -5 \quad y = f(x) &= \sqrt{x+5} \\
 \Leftrightarrow y^2 &= x+5 \quad \text{με } y \geq 0 \\
 \Leftrightarrow x &= y^2 - 5 \quad \text{και ισχύει } x \geq -5
 \end{aligned}$$

Άρα η αντίστροφη είναι  $f^{-1}(x) = x^2 - 5, x \geq 0$

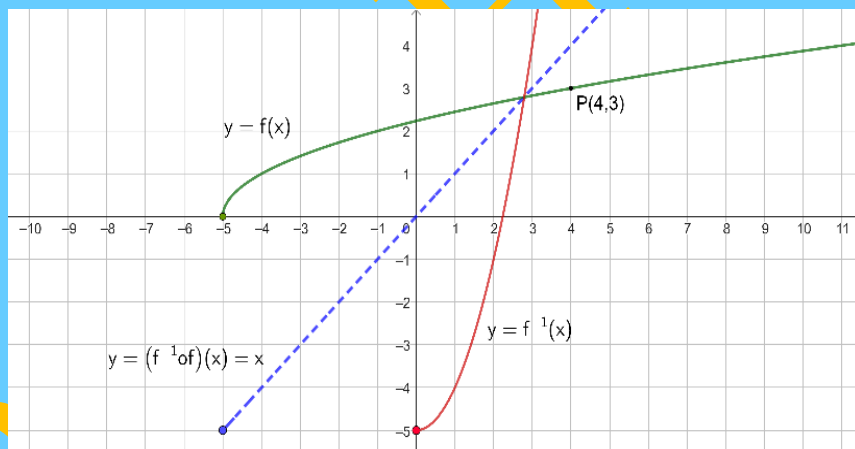
**Δ4.** Γνωρίζουμε ότι  $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad x \in D_f$

Άρα η ζητούμενη σύνθεση ορίζεται και έχει τύπο

$$g(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad x \in [-5, +\infty)$$

Η γραφική παράσταση της  $f$  σχεδιάζεται, αφού μεταφέρουμε κατά 5 μονάδες αριστερά την γραφική παράσταση της βασικής συνάρτησης  $y = \sqrt{x}, x \geq 0$ .

Επίσης η αντίστροφη έχει γραφική παράσταση συμμετρική της  $C_f$  ως προς την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης  
 Δέσποινα Σωτηροπούλου