

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. (α) Σχολικό σελ 76
(β) Σχολικό σελ 31, 33
(γ) Σχολικό σελ 73

A2. Σωστή, Σωστή, Σωστή.

A3. Λανθασμένη

Αιτιολόγηση: π.χ. αν είναι $f(x) = -x^2$, $x \neq 0$ και $g(x) = x^2$, $x \neq 0$ τότε προφανώς ισχύει ότι $f(x) < g(x)$ κοντά στο $x_0 = 0$, αλλά δεν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

A4. 1γ, 2α, 3α, 4δ, 5δ, 6β, 7δ, 8α

ΘΕΜΑ Β

B1. (α) Προκύπτει εύκολα ότι είναι συνεχής στο $[-2,1) \cup (1,3) \cup (3,5]$ και ασυνεχής στο $x_0 = 1$.

(β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (αποδεικνύεται με ορισμό) στο $(3,5]$. Έτσι το σύνολο τιμών είναι

$$f((3,5]) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), f(5) \right] = (1 - e^2, 0]$$

B2. (α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2$$

$$x_1^3 < x_2^3 \text{ και } \ln x_1 < \ln x_2$$

$$x_1^3 + \ln x_1 < x_2^3 + \ln x_2$$

$$x_1^3 + \ln x_1 - e < x_2^3 + \ln x_2 - e$$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

$$h(x_1) < h(x_2)$$

Έτσι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

(β) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2$$

$$h(x_1) < h(x_2) \quad (h \text{ γνησίως αύξουσα})$$

$$(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2))$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (g \text{ γνησίως αύξουσα})$$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = \frac{\Phi(2x) - 5}{2x^2 - 7x}$ με x κοντά στο 2.

Θα είναι $\Phi(2x) = (2x^2 - 7x)g(x) + 5$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$.

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \Phi(x) &= \lim_{\omega \rightarrow 2} \Phi(2\omega) = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 2} [(2\omega^2 - 7\omega)g(\omega) + 5] = \\ &= (8 - 14)(-\infty) + 5 = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Γ2. Το όριο έχει νόημα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Για $\alpha \neq 7$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha} = \frac{\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 8x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 7} (x - \alpha)} = \frac{0}{7 - \alpha} = 0$$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

- Για $\alpha = 7$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - 7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x-1)}{x-7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} (x-1) = 6 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Για $x \neq 0$ είναι

$$x \cdot f(x) + 3\eta\mu x = x^2$$

$$x \cdot f(x) = x^2 - 3\eta\mu x$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x}$$

Στο $x_0 = 0$ επειδή η f είναι συνεχής θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 3 \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \\ &= 0 - 3 \cdot 1 = -3 \end{aligned}$$

Άρα είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x} & x \neq 0 \\ -3 & x = 0 \end{cases}$

- Δ2. (α)** Για $x > 0$ είναι

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ εφαρμόζοντας κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ (1)

Τελικά το ζητούμενο όριο θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 \frac{\eta \mu x}{x} \right) \stackrel{(1)}{=} +\infty \quad (2)$$

(β)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{21^{f(x)} - 20^{f(x)}}{2021^{f(x)} - 2020^{f(x)}} &\stackrel{(2)}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{21^\omega - 20^\omega}{2021^\omega - 2020^\omega} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{21^\omega \left(1 - \frac{20^\omega}{21^\omega}\right)}{2021^\omega \left(1 - \frac{2020^\omega}{2021^\omega}\right)} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{21}{2021}\right)^\omega \frac{1 - \left(\frac{20}{21}\right)^\omega}{1 - \left(\frac{2020}{2021}\right)^\omega} \right) = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Αφού $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{21}{2021}\right)^\omega = 0$ και $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{20}{21}\right)^\omega = 0$, $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\frac{2020}{2021}\right)^\omega = 0$

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - 4e^{-x}$ $x \in [0, +\infty)$. Επειδή από τη σχέση (2) είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^{-x} = 0$ θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4e^{-x}) = +\infty \text{ και έτσι θα υπάρχει } \mu > 0 \text{ ώστε } g(\mu) > 0.$$

- Η g είναι συνεχής στο $[0, \mu]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και της $y = 4e^{-x}$.

- $\left. \begin{array}{l} g(0) = f(0) - 4e^0 = -3 - 4 = -7 < 0 \\ g(\mu) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(\mu) < 0$

Από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \mu)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα x_0 .