

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου

A3. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x-3)}{(x-1) \cdot (x+1)} = -1.$

B2. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -1 = 3 + 2a \Leftrightarrow a = -2$

B3. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχω $f'(x) = \frac{(2x-4) \cdot (x^2-1) - (x^2-4x+3) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 4x^2 + 4 - 2x^3 + 8x^2 - 6x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^2 - 8x + 4}{(x^2-1)^2} = \frac{4 \cdot (x^2 - 2x + 1)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

B4. Ισχύει ότι $\alpha^2 + 9 > 6\alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R} - \{3\}$ επομένως

$$\alpha^2 + 9 > 6\alpha \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha^2 + 9) > f(6\alpha)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $x \neq 0$ και $\frac{2}{x} + \frac{x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4+x^2}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow x > 0$, αφού $4+x^2 > 0$.

Επομένως $A = (0, +\infty)$

Γ2. Έχουμε ότι $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{x} + \frac{x}{2}}} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right)' = 3 \cdot \frac{-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{2}{x} + \frac{x}{2}}} =$

$$= 3 \cdot \frac{\frac{x^2 - 4}{2x^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x} + \frac{x}{2}}} = 3 \cdot \frac{x^2 - 4}{4x^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{x}{2}}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 2$$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

Ο.Ε.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 2$ το $f(2) = 3\sqrt{2}$.

Γ3. Έχουμε $f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{4}{v} \Leftrightarrow v = 20$

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	2	0,1	2	0,1	10	10
2	4	0,2	6	0,3	20	30
3	6	0,3	12	0,6	30	60
4	5	0,25	17	0,85	25	85
5	2	0,1	19	0,95	10	95
6	1	0,05	20	1	5	100
Σύνολο	20	1	-	-	100	-

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow x^2 + A\Gamma^2 = 10^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 10^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$A\Gamma = \sqrt{100 - x^2}.$$

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$

Επομένως $f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$ με $x \in (0,10)$

Δ2. Για $x \in (0,10)$ έχουμε $f'(x) = \frac{\sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{2} =$

$$= \frac{200 - 4x^2}{4\sqrt{100 - x^2}} = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

O.M.

Επομ

ένως για $x = 5\sqrt{2}$ το τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν.

Για $x = 5\sqrt{2}$ έχουμε $A\Gamma = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Άρα $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Δ3. Έχουμε ότι $f(2) = \sqrt{96}$

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{96} \cdot (f(2+x) - \sqrt{96})}{23x} = \frac{\sqrt{96}}{23} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+x) - f(2)}{x} = \frac{\sqrt{96}}{23} \cdot f'(2)$$

όπου $f'(2) = \frac{46}{\sqrt{96}}$. Άρα $l = \frac{\sqrt{96}}{23} \cdot \frac{46}{\sqrt{96}} = 2$

Δ4. Αφού $\alpha, \beta \in (8,9)$ όπου f γνησίως φθίνουσα

$$\text{με } \alpha < \beta \stackrel{f \text{ γν.φθιν.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \stackrel{f \text{ γν.φθιν.}}{\Leftrightarrow} f(f(\alpha)) < f(f(\beta)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\alpha) \cdot \sqrt{100 - f^2(\alpha)}}{2} < \frac{f(\beta) \cdot \sqrt{100 - f^2(\beta)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\sqrt{100 - f^2(\beta)}}{\sqrt{100 - f^2(\alpha)}} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \sqrt{\frac{100 - f^2(\beta)}{100 - f^2(\alpha)}}$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Επιμέλεια: Κασίμπρας Ευθύμης