Λύσεις Μαθηματικών Γενικής Παιδείας (Αλγεβρα) ΕΠΑΛ

Θέμα Α

Α1.Σχολικό σελ 30. **Α2.**Σχολικό σελ 58,59

Α3.i.κυκλικό, ποσοτικών, ποιοτικών. **ii.** $f_i=\dfrac{\nu_i}{\nu}$ **iii.**γνησίως φθίνουσα **iv**.γνησίως αύξουσα

v. εφαπτομένης, $f'(x_0)$,μεταβολής,f(x) , x,x=x_0

Α4.i.Λ, ii.Σ, iii.Λ, iv.Λ, v.Σ

Θέμα Β

Β1. $f(0)=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{4+\alpha}{-3}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 4+\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=-5$

Η f είναι συνεχής στο 3 άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

$f(3)=\beta-\dfrac{2}{5}$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x^2+16}-5\right)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+16-25}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

άρα $\beta-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow\beta=\dfrac{5}{5}\Leftrightarrow\beta=1$

Β2. Πρέπει $1-x^2\ge0\Leftrightarrow x^2\le1\Leftrightarrow|x|\le1\Leftrightarrow-1\le x\le1$

άρα $A=[-1,1]$

Για $x\in(-1,1), g'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Πρέπει $g'(x_0)=0\Leftrightarrow-\dfrac{x_0}{\sqrt{1-{x_0}^2}}=0\Leftrightarrow x_0=0$

και $g(0)=-1$ άρα θέλουμε την εφαπτομένη στο σημείο $A(0,-1)$

$$\left.\begin{aligned}&(\varepsilon): y=g'(0)x+\beta\Leftrightarrow y=\beta\\&A\in(\varepsilon)\Rightarrow-1=\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow(\varepsilon): y=-1$$

Β3. $$\lim_{h\to0}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}}=-\frac{1}{\sqrt3}=-\frac{\sqrt3}{3}$$

Θέμα Γ

$f(x)=3(4-x)(x-2)^2$ Af=R

Γ1. $f'(x)=-3(x-2)^2+3(4-x)\cdot 2(x-2)=3(x-2)\cdot\left[-(x-2)+2(4-x)\right]$

$=3(x-2)\cdot(-x+2+8-2x)=3(x-2)\cdot(10-3x)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $10-3x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{10}{3}$

- $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$
- $10-3x>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{10}{3}$

x		2		$\frac{10}{3}$	
$x-2$	−	0	+		+
$10-3x$	+		+	0	−
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗		↘

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,2]$ και $\left[\dfrac{10}{3},+\infty\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[2,\dfrac{10}{3}\right]$ και έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2)=0$ και τοπικό μέγιστο το $f\left(\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{32}{9}$

Γ2. $f'(x)=3(x-2)(10-3x)$ ρυθμός μεταβολής

$f''(x)=3(10-3x)+3(x-2)(-3)=30-9x-9x+18=-18x+48$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -18x=-48 \Leftrightarrow x=\dfrac{48}{18}=\dfrac{8}{3}$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -18x+48>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{8}{3}$

x		$\frac{8}{3}$	
$f''(x)$	+	0	−
$f'(x)$	↗		↘

Η $f'(x)$ γίνεται μέγιστη όταν $x=\dfrac{8}{3}$ τότε $f\left(\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{16}{9}$

Άρα το σημείο είναι το $M\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{16}{9}\right)$

Γ3. $-\frac{17}{3}<2$ f $\downarrow \sigma\tau o\left(-\infty,2\right]$ άρα $f\left(-\frac{17}{3}\right)>f\left(2\right)$ (1)

$\frac{10}{3}<\frac{17}{3}$ και f $\downarrow \sigma\tau o\left[\frac{10}{3},+\infty\right)$ άρα $f\left(\frac{10}{3}\right)>f\left(\frac{17}{3}\right)$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) και έχουμε:

$$f\left(-\frac{17}{3}\right)+f\left(\frac{10}{3}\right)>f\left(2\right)+f\left(\frac{17}{3}\right)$$

Γ4.

$f(2)=0$

$f'(3)=3$

$f''(2)=12$

άρα $\lambda^{2021}\cdot 0+3\lambda+12=\lambda^3+14\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^3+14\lambda^2-3\lambda-12=0$

1	14	-3	-12	1
	1	15	12	
1	15	12	0	

άρα

$(\lambda-1)(\lambda^2+15\lambda+12)=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda^2+15\lambda+12=0$

$$\Delta=177,\ \lambda=\frac{-15\pm\sqrt{177}}{2}$$

Θέμα Δ

Δ1. Για την f θα ισχύουν $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$f'\left(x\right)=2\kappa x-5$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2\kappa\frac{1}{2}-5=0 \Leftrightarrow \kappa=5$

άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \Leftrightarrow \frac{5}{4}-\frac{5}{2}+\frac{\lambda}{4}=2 \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 5-10+\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=13$

Δ2. $\nu_1=10,\nu_2=5,\nu_3=21,\nu_4=14$

$E=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=50$

Δ3. Τα κέντρα των κλάσεων είναι $x_1=5, x_2=9, x_3=13, x_4=17$

Τοπλάτος των κλάσεων είναι $c=x_2-x_1=4$ και αν $\left[\alpha,\alpha+4\right)$ είναι η πρώτη κλάση,

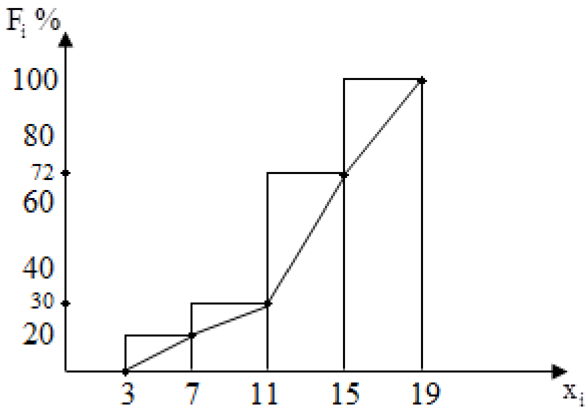
τότε θα ισχύει $\frac{\alpha+\alpha+4}{2}=5 \Leftrightarrow 2\alpha+4=10 \Leftrightarrow \alpha=3$

Και $f_i\%=\frac{\nu_i}{\nu}\cdot 100=\frac{\nu_i}{50}\cdot 100=2\nu_i$

Κλάσεις	v_i	$f_i\% = 2v_i$	$F_i\%$
$[3,7)$	10	20	20
$[7,11)$	5	10	30
$[11,15)$	21	42	72
$[15,19)$	14	28	100

$v = 50$

Δ4.



(i) Οι τιμές στις κλάσεις θεωρούνται ισοκατανεμημένες άρα από $[14,15)$ έχει το

$\frac{1}{4} f_3\% = \frac{1}{4} \cdot 42 = 10,5\%$

και τιμή από $[15,19)$ έχει το 28%

Άρα τιμή τουλάχιστον 14 έχει το 10,5% + 28% = 38,5%

(ii) Τιμή το πολύ 11 έχουν $v_1+v_2=10+5=15$ παρατηρήσεις.

Επιμέλεια : Ε. Λιάκουρα Θ. Μαλάκης Γ. Καπράλος