

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελίδα 99 σχολικού βιβλίου

A2. α) Ψευδής

β) Η $g(x)$ είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη,
σελίδα 35 σχολικού βιβλίου αντιπαράδειγμα

A3. Σελίδα 216 σχολικού βιβλίου

A4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό


ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	\emptyset	-	+
$f(x)$				

Τ.μέγιστο

Για $x \in (-\infty, -2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Για $x \in [-2, 0)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Για $x \in (0, +\infty)$ η f γνησίως αύξουσα

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x = -2$ το $f(-2) = -3$

Β2.

$$f''(x) = \frac{-8 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-24}{x^4} < 0$$

Η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R} - \{0\}$

Δεν έχει σημεία καμπής.

B3.

Εξετάζω για κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$$

Όμοια το αριστερό πλευρικό όριο στο 0 κάνει $-\infty$

Οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x=0$

Εξετάζω για πλάγιες στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

Άρα $\lambda=1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0 = \beta$$

Οπότε η $y=x$ πλάγια στο $+\infty$

Εξετάζω για πλάγιες στο $-\infty$




$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

Άρα $\lambda=1$

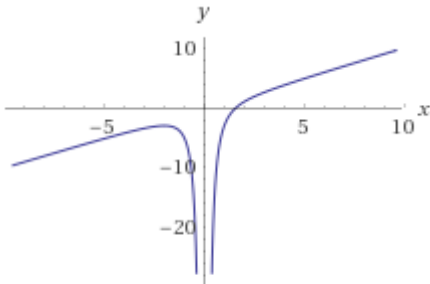
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0 = \beta$$

Οπότε η $y=x$ πλάγια στο $-\infty$

B4.

x	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	ϕ	+
$f''(x)$	-	-	-
			

τ.μέγιστο



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\frac{x}{4}$ είναι $E_1(x) = \frac{x^2}{16}$

Ο κύκλος έχει περίμετρο $L=8-x \Leftrightarrow 2\pi\rho=8-x \Leftrightarrow \rho = \frac{8-x}{2\pi}$

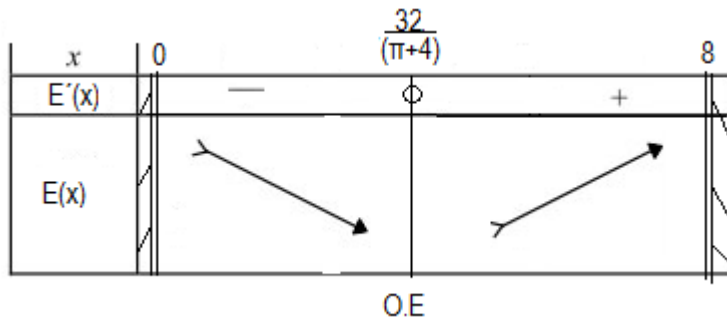
Το εμβαδόν του κύκλου θα είναι $E_2(x) = \pi\rho^2 = \pi \frac{(8-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(8-x)^2}{4\pi}$

Οπότε $E(x) = E_1(x) + E_2(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$.

Γ2.

$$E'(x) = \frac{2(\pi + 4) \cdot x - 64}{16\pi}$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{32}{\pi + 4}$$



Το εμβαδόν ελαχιστοποιείται όταν $x = \frac{32}{\pi + 4}$ τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4} = \frac{8}{\pi + 4}$ και η

διάμετρος του κύκλου είναι $2\rho = \frac{8}{\pi + 4}$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \frac{16}{\pi} > 5$ γιατί $16 > 5\pi \Leftrightarrow \frac{16}{5} > \pi \Leftrightarrow 3,2 > \pi$
- $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{16}{\pi} - \frac{64}{\pi(\pi+4)}$
- $\lim_{x \rightarrow 8} E(x) = 4$

Άρα $5 \in E\left(\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)\right) = \left[\frac{16}{\pi} - \frac{64}{\pi(\pi+4)}, \frac{16}{\pi}\right)$ και $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο

$\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$ επομένως η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει ρίζα στο $\left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$.

Το $5 \notin E\left(\left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)\right) = \left[\frac{16}{\pi} - \frac{64}{\pi(\pi+4)}, 4\right)$.

Επομένως η εξίσωση $E(x) = 5$ έχει μοναδική ρίζα.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. $f'(x) = 2e^{x-a} - 2x$, $a > 1$

$$f''(x) = 2e^{x-a} - 2$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} \geq 2 \Leftrightarrow e^{x-a} \geq 1 \Leftrightarrow x-a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq a$$

Η $f''(x) < 0$ για $x \in (-\infty, a)$ άρα η f στρέφει τα κοίλα κάτω

Η $f''(x) > 0$ για $x \in (a, +\infty)$ άρα η f στρέφει τα κοίλα πάνω

Η f παρουσιάζει σ.κ. για $x=a$, με $f(a) = 2 - a^2$

Δ2.

Η $f''(x) < 0$ για $x \in (-\infty, a)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Η $f''(x) > 0$ για $x \in (a, +\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=a$ με $f'(a) = 2 - 2a < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{x-a} - x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-a} - 2x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Επομένως $0 \in f'((-\infty, a]) = [2 - 2a, +\infty)$ και f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, a]$

Άρα η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1 \in (-\infty, a)$.

και $0 \in f'([a, +\infty)) = [2 - 2a, +\infty)$ και f γν. αύξουσα στο $[a, +\infty)$

άρα η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα $x_2 \in (a, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

Δ3.

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > f(a) > f(1)$ αφού $a < x$ και f γν. φθίνουσα.

$$2e^{1-a} - 1 > 2 - a^2$$

$$2e^{1-a} + a^2 > 3$$

$$g(x) = 2e^{1-x} + x^2, \quad x \geq 1$$

$$g'(x) = -2e^{1-x} + 2x$$

$$g''(x) = 2e^{1-x} + 2 > 0$$

$$g'(x) > g'(1) = -2 + 2 = 0$$

$$g'(x) > 0 \text{ άρα } g \text{ γν. φθίνουσα}$$

$$g(x) > g(1) = 3$$

Άρα $f(x) > f(1)$ δηλαδή $f(x) = f(1)$ αδύνατη.

Δ4.

$$f(x) = 2e^{x-2} - x^2$$

$$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$$

Η εφαπτομένη στο Σ.Κ. $x=2$ είναι $\epsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$$y - (-2) = (-2)(x - 2)$$

$$y = -2x + 2$$

Για $x > 2$

$$f(x) > -2x + 2$$

$$f(x)\sqrt{x-2} > (-2x+2)\sqrt{x-2}$$

$$f(x)\sqrt{x-2} > -2(x-2)\sqrt{x-2}$$

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} dx > -2 \int_2^3 (x-2)\sqrt{x-2} dx \quad (1)$$

$$\int_2^3 (x-2)\sqrt{x-2} dx = \int_2^3 (x-2)^{3/2} dx = \left[\frac{(x-2)^{5/2}}{\frac{5}{2}} \right]_2^3 = \frac{2}{5} \Rightarrow \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} dx > -2 \frac{2}{5} = -\frac{4}{5} = -\frac{12}{15} > -\frac{32}{15}$$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ

ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ ΛΕΥΚΟΚΟΙΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ ΝΑΣΙΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΠΙΔΑ

ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ

ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ